



MAT 304

B.A./B.Sc. VIth SEMESTER EXAMINATION, 2024-25

MATHEMATICS

(Metric Spaces and Complex Analysis)

AFFIX PRESCRIBED
RUBBER STAMP

Paper ID

(To be filled in the
OMR Sheet)

5593

Date (तिथि) : _____

अनुक्रमांक (अंकों में) :

Roll No. (In Figures) :

अनुक्रमांक (शब्दों में) :

Roll No. (In Words) : _____

Time : 1:30 Hrs.

समय : 1:30 घण्टे

Max. Marks : 75

अधिकतम अंक : 75

नोट : पुस्तिका में 50 प्रश्न दिये गये हैं, सभी प्रश्न करने होंगे। प्रत्येक प्रश्न 1.5 अंक का होगा।

Important Instructions :

1. The candidate will write his/her Roll Number only at the places provided for, i.e. on the cover page and on the OMR answer sheet at the end and nowhere else.
2. Immediately on receipt of the question booklet, the candidate should check up the booklet and ensure that it contains all the pages and that no question is missing. If the candidate finds any discrepancy in the question booklet, he/she should report the invigilator within 10 minutes of the issue of this booklet and a fresh question booklet without any discrepancy be obtained.

महत्वपूर्ण निर्देश :

1. अभ्यर्थी अपने अनुक्रमांक केवल उन्हीं स्थानों पर लिखेंगे जो इसके लिए दिये गये हैं, अर्थात् प्रश्न पुस्तिका के मुख्य पृष्ठ तथा साथ दिये गये ओ०एम०आर० उत्तर पत्र पर, तथा अन्यत्र कहीं नहीं लिखेंगे।
2. प्रश्न पुस्तिका मिलते ही अभ्यर्थी को जाँच करके सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि इस पुस्तिका में पूरे पृष्ठ हैं और कोई प्रश्न छूटा तो नहीं है। यदि कोई विसंगति है तो प्रश्न पुस्तिका मिलने के 10 मिनट के भीतर ही कक्ष परिप्रेक्षक को सूचित करना चाहिए और बिना त्रुटि की दूसरी प्रश्न पुस्तिका प्राप्त कर लेना चाहिए।

1. A subset A of X is dense in X if \bar{A} is, where X represents a metric space (X, d) :
- (A) X
 (B) ϕ
 (C) A
 (D) A^c
2. Every uniformly continuous function is :
- (A) Bounded
 (B) Constant
 (C) Discontinuous
 (D) Continuous
3. A non-empty subset A of a metric space (X, d) is connected but it is not a proper subset of some other connected subset of X . Then A is :
- (A) Singleton set
 (B) Separated set
 (C) Compact set
 (D) Component
4. In usual metric space (R, d) which pair of sets are separated ?
- (A) $[0,3], [3,6]$
 (B) $[0,3], (3,6)$
 (C) $(0,3), [3,6]$
 (D) $(0,3), (3,6)$
1. X का उपसमुच्चय A , X में घना है यदि \bar{A} है, जहाँ X दूरीक समष्टि (X, d) को प्रदर्शित करता है :
- (A) X
 (B) ϕ
 (C) A
 (D) A^c
2. प्रत्येक एकरूपतः सतत फलन है :
- (A) परिबद्ध
 (B) अचर
 (C) असतत
 (D) सतत
3. दूरीक समष्टि (X, d) का अरिक्त उपसमुच्चय A सम्बद्ध है परन्तु यह X के किसी और सम्बद्ध उपसमुच्चय का उचित उपसमुच्चय नहीं है। तो A है :
- (A) एकल समुच्चय
 (B) विभक्त समुच्चय
 (C) सघन समुच्चय
 (D) घटक
4. सामान्य दूरीक समष्टि (R, d) में कौन-सा युग्म विभक्त है ?
- (A) $[0,3], [3,6]$
 (B) $[0,3], (3,6)$
 (C) $(0,3), [3,6]$
 (D) $(0,3), (3,6)$

5. Choose incorrect statement :
In any metric space (X, d) –
- (A) Every compact set is closed
(B) Every compact set is bounded
(C) Every closed and bounded set is compact
(D) None of the above
6. Which of the following is an open cover of the real line ?
- (A) $\{(-|x|, |x|): x \in \mathbb{R}\}$
(B) $\{(x, x + 1): x \in \mathbb{R}\}$
(C) $\{(x - 1, x + 1): x \in \mathbb{Z}\}$
(D) All of the above
7. Let R be a metric space with usual metric. Then the mapping $F: R \rightarrow R$ defined by $F(x) = 1 \forall x \in R$ is :
- (A) Continuous
(B) Closed
(C) Open
(D) Both (A) and (B)
8. Let (X, d) and (Y, d') be any two metric spaces. The constant map $F: X \rightarrow Y$ is :
- (A) Continuous
(B) Bijective
(C) Discontinuous
(D) Subjective but not injective
5. गलत कथन चुनें :
किसी दूरीक समष्टि (X, d) में –
- (A) प्रत्येक सघन समुच्चय संवृत है
(B) प्रत्येक सघन समुच्चय परिबद्ध है
(C) प्रत्येक संवृत और परिबद्ध समुच्चय सघन है
(D) उपरोक्त में से कोई नहीं
6. निम्न में से वास्तविक रेखा का कौन खुला आच्छादन है ?
- (A) $\{(-|x|, |x|): x \in \mathbb{R}\}$
(B) $\{(x, x + 1): x \in \mathbb{R}\}$
(C) $\{(x - 1, x + 1): x \in \mathbb{Z}\}$
(D) उपरोक्त सभी
7. यदि R , सामान्य दूरीक के साथ दूरीक समष्टि है, तो प्रतिचित्रण $F: R \rightarrow R$ परिभाषित है $F(x) = 1 \forall x \in R$ है :
- (A) सतत्
(B) बंद
(C) खुला
(D) (A) और (B) दोनों
8. यदि (X, d) और (Y, d') दो दूरीक समष्टियाँ हैं। $F: X \rightarrow Y$ में स्थिर प्रतिचित्रण है :
- (A) सतत
(B) एकैकी आच्छादक
(C) असतत
(D) एकैकी परन्तु आच्छादक नहीं

9. Let Q and R denotes the metric spaces of all rational numbers and all real numbers respectively along with usual metric. The map $F: Q \rightarrow R$ given by $F(x) = x$ for all $x \in Q$. Then :

- (A) Map F is an isometry & these spaces Q and R are isometric
- (B) Map F is an isometry but these spaces Q and R are not isometric
- (C) Map F is not an isometry but these spaces Q and R are isometric
- (D) Map F is not an isometry also spaces Q and R are not isometric

10. Which of the following statement is incorrect ?

- (A) Arbitrary union of open sets is open
- (B) Arbitrary union of closed sets is a closed set
- (C) Arbitrary intersection of closed sets is a closed set
- (D) None of the above

9. Q और R समी परिमेय संख्याओं और वास्तविक संख्याओं का दूरीक समष्टि है तथा उन पर सामान्य दूरीक है। प्रतिचित्रण $F: Q \rightarrow R$ इस प्रकार है। $F(x) = x$ प्रत्येक $x \in Q$ के लिए तो :

- (A) प्रतिचित्रण F सममित है, और ये समष्टियाँ Q और R सममितीय हैं
- (B) प्रतिचित्रण F सममित है, परन्तु ये समष्टियाँ Q और R सममितीय नहीं हैं
- (C) प्रतिचित्रण F सममित नहीं है, परन्तु ये समष्टियाँ Q और R सममितीय हैं
- (D) प्रतिचित्रण F सममित नहीं है साथ ही समष्टियाँ Q और R सममितीय नहीं हैं

10. निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सही नहीं है ?

- (A) विवृत समुच्चयों का स्वेच्छ संघ विवृत होता है
- (B) संवृत समुच्चयों का स्वेच्छ संघ संवृत होता है
- (C) संवृत समुच्चयों का स्वेच्छ प्रतिच्छेद संवृत होता है
- (D) उपरोक्त में से कोई नहीं

11. In any metric space (X, d) , choose incorrect statement :
- (A) Every convergent sequence is a Cauchy sequence
 (B) Every Cauchy sequence is convergent
 (C) A Cauchy sequence is bounded
 (D) Limit of a sequence if exists, is unique
12. A finite set has :
- (A) Limit point zero only
 (B) Infinitely many limit points
 (C) Finitely many limit points
 (D) No limit point
13. In the set R^2 of all ordered pairs of real numbers endowed with the Euclidean metric, let us consider the set
 $B = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
 Then $ext(B)$ is :
- (A) ϕ
 (B) B
 (C) $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 > 1\}$
 (D) $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
11. किसी दूरीक समष्टि (X, d) में, गलत कथन चुनें:
- (A) प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम कोशी अनुक्रम है
 (B) प्रत्येक कोशी अनुक्रम अभिसारी है
 (C) कोशी अनुक्रम परिबद्ध है
 (D) अनुक्रम की सीमा का यदि अस्तित्व है, तो वह अद्वितीय है
12. सीमित समुच्चय के पास है :
- (A) सिर्फ शून्य सीमा बिन्दु
 (B) असीमित सीमा बिन्दु
 (C) सीमित सीमा बिन्दु
 (D) कोई सीमा बिन्दु नहीं
13. वास्तविक संख्याओं का क्रमित युग्म जो कि समुच्चय R^2 पर तथा उस पर यूक्लिडीयन दूरीक है यदि समुच्चय
 $B = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
 तो $ext(B)$ है :
- (A) ϕ
 (B) B
 (C) $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 > 1\}$
 (D) $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

14. Let X be a non-empty set endowed with discrete metric d on X . Let A be any non-empty subset of X then:
- (A) $\text{int } A \not\subset A$
 (B) $A \not\subset \text{int } A$
 (C) $A = \text{int } A$
 (D) $A \neq \text{int } A$
15. Let A and B be two arbitrary non-empty sets in a metric space (X, d) . Then, choose incorrect from following :
- (A) $A \subset C \Rightarrow \text{int}(A) \subset \text{int}(B)$
 (B) $\text{int}(A \cup B) \subset \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$
 (C) $\text{int}(A) \subset A$
 (D) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$
16. Let X be a non-empty set, $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ is a metric on X . Then range of d is :
- (A) $(-\infty, 0]$
 (B) $(0, \infty)$
 (C) $[0, \infty)$
 (D) \mathbb{R}
14. X अरिक्त समुच्चय है। d, x पर असतत दूरीक है। यदि A, X का अरिक्त उपसमुच्चय है, तो :
- (A) $\text{int } A \not\subset A$
 (B) $A \not\subset \text{int } A$
 (C) $A = \text{int } A$
 (D) $A \neq \text{int } A$
15. दूरीक समष्टि (X, d) में A और B दो स्वेच्छाचारी अरिक्त समुच्चय हैं तो निम्न में से गलत चुनें :
- (A) $A \subset C \Rightarrow \text{int}(A) \subset \text{int}(B)$
 (B) $\text{int}(A \cup B) \subset \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$
 (C) $\text{int}(A) \subset A$
 (D) $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$
16. यदि X एक अरिक्त समुच्चय है और $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, X पर एक दूरीक है। तो d का परिसर है :
- (A) $(-\infty, 0]$
 (B) $(0, \infty)$
 (C) $[0, \infty)$
 (D) \mathbb{R}

17. Let us consider the non-empty set X together with the discrete metric d on X . Then closed sphere with radius $r = 1$ and centre ' a ' is where a is any point of X :
- (A) $\{a\}$
 (B) X
 (C) ϕ
 (D) None of the above
18. Rectangular metric on R^2 is defined by –
 Let $x = (x_1, x_2)$ and $y = (y_1, y_2)$ be arbitrary elements of R^2 :
- (A) $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
 (B) $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
 (C) $d(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$
 (D) $d(x, y) = |x_1 - y_1|$
19. In a metric space (R, d) , where d is a usual metric on R .
 Let $A_1 = (-4, 4)$ and $A_2 = (4, 5)$ be two open intervals. Then distance between the two non-empty sets A_1, A_2 is :
- (A) 0
 (B) Some positive real number
 (C) 4
 (D) ∞
17. X एक अरिक्त समुच्चय है और d, X पर असतत दूरीक है बंद गोला जिसकी त्रिज्या $r = 1$ केन्द्र ' a ' है जहाँ a, X का कोई बिन्दु है :
- (A) $\{a\}$
 (B) X
 (C) ϕ
 (D) उपरोक्त में से कोई नहीं
18. आयताकार दूरीक, R^2 पर परिभाषित होती है यदि $x = (x_1, x_2)$ और $y = (y_1, y_2)$ R^2 के दो स्वेच्छाचारी अव्यय है:
- (A) $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
 (B) $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
 (C) $d(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$
 (D) $d(x, y) = |x_1 - y_1|$
19. दूरीक समष्टि (R, d) में, जहाँ सामान्य दूरीक है R पर।
 यदि $A_1 = (-4, 4)$ और $A_2 = (4, 5)$ दो खुले अंतराल हैं, तो दो अरिक्त समुच्चयों A_1, A_2 के बीच दूरी है :
- (A) 0
 (B) कोई धनात्मक वास्तविक संख्या
 (C) 4
 (D) ∞

20. Let us consider the set R of all real numbers endowed with the usual metric let $S = (-2, 2) \subset R$. Here δ is a distance between a point and a set. Then :
- (A) $2 \in S$ and $\delta(2, S) = 0$
 (B) $2 \notin S$ and $\delta(2, S) = 0$
 (C) $2 \in S$ and $\delta(2, S) \neq 0$
 (D) $2 \notin S$ and $\delta(2, S) \neq 0$
21. Let (X, d_1) be a metric space where d_1 may or may not be bounded. We construct another function $d_2: X \times X \rightarrow R$ by different ways. Choose which of the following metric is unbounded?
- (A) $d_2(x, y) = \min\{1, d_1(x, y)\}$
 (B) $d_2(x, y) = \frac{d_1(x, y)}{1+d_1(x, y)}$
 (C) $d_2(x, y) = \frac{Md_1(x, y)}{1+d_1(x, y)}$, where M is a positive real number
 (D) None of the above
22. A metric $d: IR^2 \times IR^2 \rightarrow IR$ defined as $d(x, y) = |x_1 - y_1|$ where $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in IR^2$ is :
- (A) Metric on IR^2
 (B) Pseudo metric on IR^2
 (C) Not countable
 (D) None of these
20. R वास्तविक संख्याओं का समूह है तथा उस पर सामान्य दूरीक यदि $S = (-2, 2) \subset R$ यहाँ δ एक बिन्दु एवं एक समुच्चय के बीच की दूरी है। तो :
- (A) $2 \in S$ and $\delta(2, S) = 0$
 (B) $2 \notin S$ and $\delta(2, S) = 0$
 (C) $2 \in S$ and $\delta(2, S) \neq 0$
 (D) $2 \notin S$ and $\delta(2, S) \neq 0$
21. यदि (X, d_1) एक दूरीक समष्टि है जहाँ d_1 परिबद्ध हो भी सकता है और नहीं भी। $d_2: X \times X \rightarrow R$ एक दूसरे फलन इन प्रकारों से परिभाषित हैं। निम्नलिखित में से अपरिबद्ध दूरीक है :
- (A) $d_2(x, y) = \min\{1, d_1(x, y)\}$
 (B) $d_2(x, y) = \frac{d_1(x, y)}{1+d_1(x, y)}$
 (C) $d_2(x, y) = \frac{Md_1(x, y)}{1+d_1(x, y)}$, जहाँ M एक धनात्मक वास्तविक संख्या है
 (D) उपरोक्त में से कोई नहीं
22. दूरीक $d: IR^2 \times IR^2 \rightarrow IR$ परिभाषित है $d(x, y) = |x_1 - y_1|$ जहाँ $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in IR^2$:
- (A) IR^2 पर दूरीक
 (B) IR^2 पर छदम् - दूरीक
 (C) अगणनीय
 (D) उपरोक्त में से कोई नहीं

23. Choose correct statement :
- (A) Every metric is a pseudo-metric
 (B) Every pseudo-metric is a metric
 (C) Discrete metric is unbounded
 (D) All of the above
24. Let (X, d) be a metric space $\delta(A)$ represents diameter of A . Then which of the following is correct ?
- (A) $\delta(A) \leq 0$
 (B) $\delta(A) = 0$ iff $A \subset X$ is a singleton set
 (C) $A, B \subset X, A \subset B \Rightarrow \delta(A) \supset \delta(B)$
 (D) For $A, B \subset X$ and $A \cap B \neq \phi \Rightarrow \delta(A \cup B) > \delta(A) + \delta(B)$
25. Let (X, d) be a metric space. Then inequality $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z$ in X , is called :
- (A) Cauchy-Schwarz inequality
 (B) Triangle inequality
 (C) Distance inequality
 (D) All of the above
23. सही कथन चुनें :
- (A) प्रत्येक दूरीक, छद्म-दूरीक है
 (B) प्रत्येक छद्म-दूरीक, दूरीक है
 (C) असतत दूरीक अपरिबद्ध है
 (D) उपरोक्त सभी
24. (X, d) एक दूरीक समष्टि है। $\delta(A)$, A के व्यास को दिखाता है, तो निम्न में से कौन सही है ?
- (A) $\delta(A) \leq 0$
 (B) $\delta(A) = 0$ यदि और केवल यदि $A \subset X$ इकाई समुच्चय है
 (C) $A, B \subset X, A \subset B \Rightarrow \delta(A) \supset \delta(B)$
 (D) $A, B \subset X$ और $A \cap B \neq \phi$ के लिए $\Rightarrow \delta(A \cup B) > \delta(A) + \delta(B)$
25. यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है। तो असमिका $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \forall x, y, z \in X$, में कहा जाता है:
- (A) कोशी-स्वार्ज असमिका
 (B) त्रिभुज असमिका
 (C) दूरी असमिका
 (D) उपरोक्त सभी

26. Let \mathcal{C} be the set of all complex numbers. Define a function $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ by $f(z) = z^2 + 1 \forall z \in \mathcal{C}$. Let $z = x + iy$ be a complex variable and $u(x, y)$ denotes the real part of $f(z)$. Then the value of $u(1, 1)$ is :

- (A) 1
- (B) 2
- (C) -1
- (D) -2

27. Which of the following function is harmonic in \mathcal{C} ?

- (A) $\phi(x, y) = x^5 - y^5 \forall z = x + iy \in \mathcal{C}$
- (B) $\phi(x, y) = e^{2x} \forall z = x + iy \in \mathcal{C}$
- (C) $\phi(x, y) = x^2 + y^2 \forall z = x + iy \in \mathcal{C}$
- (D) $\phi(x, y) = e^x \cos y \forall z = x + iy \in \mathcal{C}$

Here \mathcal{C} denotes the set of all complex numbers.

26. मान लीजिए कि \mathcal{C} सभी सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है। फलन $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ को $f(z) = z^2 + 1 \forall z \in \mathcal{C}$ से परिभाषित करें। मान लीजिये कि $z = x + iy$ एक सम्मिश्र चर है एवं $u(x, y)$ $f(z)$ के वास्तविक भाग को दर्शाता है। तो $u(1, 1)$ का मान है :

- (A) 1
- (B) 2
- (C) -1
- (D) -2

27. निम्नलिखित में से कौन सा फलन \mathcal{C} में प्रसंवादी है ?

- (A) $\phi(x, y) = x^5 - y^5 \forall z = x + iy \in \mathcal{C}$
- (B) $\phi(x, y) = e^{2x} \forall z = x + iy \in \mathcal{C}$
- (C) $\phi(x, y) = x^2 + y^2 \forall z = x + iy \in \mathcal{C}$
- (D) $\phi(x, y) = e^x \cos y \forall z = x + iy \in \mathcal{C}$

यहाँ \mathcal{C} सभी सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय को दर्शाता है।

28. Let Z be a complex variable and r be any positive real number. Then, the equation $|z - 2| = r$, in the complex plane, denotes :
- (A) A circle
(B) An ellipse
(C) A parabola
(D) A hyperbola
29. Which of the following is a simple closed curve ?
- (A) $\{e^{it}, 0 \leq t \leq \pi\}$
(B) $\{e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi\}$
(C) $\{e^{zit}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$
(D) $\{e^{it}, 0 \leq t \leq 4\pi\}$
30. Consider the following statements
- (i) Define a function $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ by $f(z) = e^{2z} \forall z \in \mathbb{C}$. Then f is an entire function.
- (ii) Define a function $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ by $f(z) = \cos(2z) \forall z \in \mathbb{C}$. Then f is an entire function.
- Then :
- (A) Only (i) is true
(B) Only (ii) is true
(C) Both (i) and (ii) are true
(D) Both (i) and (ii) are false
- Where \mathbb{C} denotes the set of all complex numbers.
28. मान लीजिये कि Z एक सम्मिश्र चर है एवं r कोई धनात्मक वास्तविक संख्या है। तो सम्मिश्र तल पर, समीकरण $|z - 2| = r$ दर्शाता है :
- (A) एक वृत्त
(B) एक दीर्घवृत्त
(C) एक परवलय
(D) एक अतिपरवलय
29. निम्नलिखित में से कौन सरल बन्द वक्र है?
- (A) $\{e^{it}, 0 \leq t \leq \pi\}$
(B) $\{e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi\}$
(C) $\{e^{zit}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$
(D) $\{e^{it}, 0 \leq t \leq 4\pi\}$
30. निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिये :
- (i) फलन $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ को $f(z) = e^{2z} \forall z \in \mathbb{C}$ से परिभाषित करें। तो f एक सम्पूर्ण फलन है।
- (ii) फलन $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ को $f(z) = \cos(2z) \forall z \in \mathbb{C}$ से परिभाषित करें। तो f एक सम्पूर्ण फलन है।
- तो :
- (A) केवल (i) सत्य है
(B) केवल (ii) सत्य है
(C) (i) एवं (ii) दोनों सत्य हैं
(D) (i) एवं (ii) दोनों असत्य हैं
- जहाँ \mathbb{C} सभी सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय को दर्शाता है।

31. Define a function $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ by $f(z) = \cos \bar{z} \forall z \in \mathbb{C}$. Then :

- (A) f is differentiable at $z = \frac{\pi}{2}$
- (B) f is differentiable at $z = \frac{3\pi}{2}$
- (C) f is differentiable at $z = \pi$
- (D) f is not continuous at $z = \pi$

Where \mathbb{C} denotes the set of all complex numbers.

32. "A bounded entire function is constant." This statement is known as :

- (A) Liouville's theorem
- (B) Cauchy's theorem
- (C) Morera's theorem
- (D) Jordan curve theorem

33. Let $\alpha = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z^2+3)(z^2+3z+1)}{(z+i)^3}$ where z be a complex variable. Then the value of $16\alpha^2$ is :

- (A) 9
- (B) -9
- (C) 16
- (D) 24

31. फलन $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ को $f(z) = \cos \bar{z} \forall z \in \mathbb{C}$ से परिभाषित करें। तो :

- (A) $f, z = \frac{\pi}{2}$ पर अवकलनीय है
- (B) $f, z = \frac{3\pi}{2}$ पर अवकलनीय है
- (C) $f, z = \pi$ पर अवकलनीय है
- (D) $f, z = \pi$ पर सतत् नहीं है

जहाँ \mathbb{C} सभी सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय को दर्शाता है।

32. "एक परिबद्ध सम्पूर्ण फलन नियत होता है।" यह कथन जाना जाता है :

- (A) लियोविले का प्रमेय
- (B) कोशी का प्रमेय
- (C) मोरेरा का प्रमेय
- (D) जार्डन वक्र प्रमेय

33. मान लीजिये कि

$$\alpha = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z^2+3)(z^2+3z+1)}{(z+i)^3}$$

जहाँ z एक सम्मिश्र चर है। तो $16\alpha^2$ का मान है :

- (A) 9
- (B) -9
- (C) 16
- (D) 24

34. Let D be an open connected subset of \mathbb{C} and $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ be an analytic function. If $z = re^{i\theta}$, where $r > 0$ and θ be a real number, be the polar form of the complex number z and, u and v denote the real and imaginary part of f . Then which of the following is true ?

- (A) $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$
 (B) $\frac{\partial u}{\partial r} = r \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}$
 (C) $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial r}$
 (D) $\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)^2, \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$

Here \mathbb{C} denotes the set of all complex numbers.

35. Let $|z| = 2$ be a circle described in counterclockwise direction. Then the value of the integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)(z-3)^5} dz \text{ is :}$$

- (A) 32
 (B) $-\frac{1}{32}$
 (C) 0
 (D) $\frac{1}{16\pi i}$

34. मान लीजिये कि D, \mathbb{C} का एक विवृत संबद्ध उपसमुच्चय है एवं $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ में एक वैश्लेषिक फलन है। यदि $z = re^{i\theta}$ जहाँ $r > 0$ एवं θ एक वास्तविक संख्या है, सम्मिश्र संख्या z का ध्रुवीय रूप है तथा u एवं v फलन f के वास्तविक एवं काल्पनिक भाग को दर्शाते हैं। तो निम्नलिखित में से कौन सही है ?

- (A) $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$
 (B) $\frac{\partial u}{\partial r} = r \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}$
 (C) $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial r}$
 (D) $\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)^2, \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$

यहाँ \mathbb{C} सभी सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय को दर्शाता है।

35. मान लीजिये $|z| = 2$, घड़ी की विपरीत दिशा में वर्णित एक वृत्त है। तो समाकल

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)(z-3)^5} dz \text{ का मान है :}$$

- (A) 32
 (B) $-\frac{1}{32}$
 (C) 0
 (D) $\frac{1}{16\pi i}$

36. Let $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ be an analytic function in an open subset D of \mathbb{C} . Then Cauchy-Riemann equations are :

- (A) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$
 (B) $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$
 (C) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$
 (D) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}$

37. Let $r_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 20\}$ and $r_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 30\}$ denote the circles of radii 20 and 30, respectively which are described in anticlockwise direction.

Let $I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_1} \frac{\sin z}{(z-\pi)} dz$ and

$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_2} \frac{\cos z}{(z-\pi)} dz$, then the value

of $(I_1 + I_2)^2$ is :

- (A) 0
 (B) 1
 (C) -1
 (D) 2

Where \mathbb{C} denotes the set of all complex numbers.

36. मान लीजिये $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, \mathbb{C} के एक विवृत उपसमुच्चय D में वैश्लेषिक हो। तब कोशी-रिमान समीकरण है :

- (A) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$
 (B) $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$
 (C) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$
 (D) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}$

37. मान लीजिये कि $r_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 20\}$ एवं $r_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 30\}$ क्रमशः 20 एवं 30 त्रिज्या वाले वृत्तों को दर्शाते हैं जो कि घड़ी की विपरीत दिशा में वर्णित किये गये हैं।

मान लीजिये कि $I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_1} \frac{\sin z}{(z-\pi)} dz$

एवं $I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_2} \frac{\cos z}{(z-\pi)} dz$ तो

$(I_1 + I_2)^2$ का मान है :

- (A) 0
 (B) 1
 (C) -1
 (D) 2

यहाँ \mathbb{C} सभी सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय को दर्शाता है।

38. Let z be a complex variable and $|z| = 1$ denotes the unit circle which is described in anti-clock wise direction. Then the value of integral

$$\int_{|z|=1} [e^{z^2} + \sin z + e^{2z}] dz$$

is :

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) $2\pi i$

39. Let \mathcal{C} be the set of all complex numbers. Define a function $f: \mathcal{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{C}$ by $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} \forall z \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$. Then the residue of $f(z)$ at $z = 0$ is :

- (A) 10
- (B) 1
- (C) 0
- (D) $\frac{1}{2}$

38. मान लीजिये कि z एक सम्मिश्र चर है एवं $|z| = 1$ इकाई वृत्त को दर्शाता है जो कि घड़ी की विपरीत दिशा में वर्णित है। तो समाकल

$$\int_{|z|=1} [e^{z^2} + \sin z + e^{2z}] dz$$

का मान है :

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) $2\pi i$

39. मान लीजिये \mathcal{C} सभी सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है। फलन $f: \mathcal{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{C}$ को $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} \forall z \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ से परिभाषित करें। तो फलन $f(z)$ का अवशेष $z = 0$ पर है :

- (A) 10
- (B) 1
- (C) 0
- (D) $\frac{1}{2}$

40. Define a function $f: \mathbb{C} \setminus \{10, 12\} \rightarrow \mathbb{C}$ by $f(z) = \frac{1}{(z-10)(z-12)} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{10, 12\}$. Then :

- (A) $z = 10$ is a simple pole of $f(z)$
- (B) $z = 10$ is a removable singularity of $f(z)$
- (C) $z = 0$ is a removable singularity of $f(z)$
- (D) $f(z)$ is analytic at $z = 12$

Where \mathbb{C} denotes the set of all complex numbers.

41. Let \mathbb{C} is the set of all complex numbers. Define a function $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ by $f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Then :

- (A) $z = 0$ is a removable singularity of $f(z)$
- (B) $z = 0$ is a simple pole of $f(z)$
- (C) $z = 10$ is a simple pole of $f(z)$
- (D) $z = 20$ is a simple pole of $f(z)$

40. फलन $f: \mathbb{C} \setminus \{10, 12\} \rightarrow \mathbb{C}$ को $f(z) = \frac{1}{(z-10)(z-12)} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{10, 12\}$ से परिभाषित करें। तो :

- (A) $z = 10$, $f(z)$ का एक सरल ध्रुव है
- (B) $z = 10$, $f(z)$ की एक हटाने योग्य विलक्षणता है
- (C) $z = 0$, $f(z)$ की एक हटाने योग्य विलक्षणता है
- (D) $f(z)$, $z = 12$ पर वैश्लेषिक है यहाँ \mathbb{C} सभी सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय को दर्शाता है।

41. मान लीजिये कि \mathbb{C} सभी सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है। फलन $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ को $f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ से परिभाषित करें। तो :

- (A) $z = 0$, $f(z)$ की एक हटाने योग्य विलक्षणता है
- (B) $z = 0$, $f(z)$ का एक साधारण ध्रुव है
- (C) $z = 10$, $f(z)$ का एक साधारण ध्रुव है
- (D) $z = 20$, $f(z)$ का एक साधारण ध्रुव है

42. Consider the following statements

- (i) The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(zn-1)}{n!}$ is convergent.
- (ii) The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ is divergent for every $p > 1$.

Then :

- (A) Only (i) is true
 (B) Only (ii) is true
 (C) Both (i) and (ii) are true
 (D) Both (i) and (ii) are false

43. Which of the following series is convergent ?

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$
 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$
 (C) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n^2}$
 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

44. Let x be a real variable. Then the series $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ is convergent if :

- (A) $0 < x < 1$
 (B) $2 < x < 3$
 (C) $-2 < x < -1$
 (D) $4 < x < 5$

42. निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिये -

- (i) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(zn-1)}{n!}$ अभिसारी है।
 (ii) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ प्रत्येक $p > 1$ के लिये अपसारी है।

तो :

- (A) केवल (i) सत्य है
 (B) केवल (ii) सत्य है
 (C) (i) एवं (ii) दोनों सत्य हैं
 (D) (i) एवं (ii) दोनों असत्य हैं

43. निम्नलिखित में से कौन सी श्रेणी अभिसारी है ?

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$
 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$
 (C) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n^2}$
 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

44. मान लीजिये कि x एक वास्तविक चर है।

तो श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ अभिसारी है, यदि :

- (A) $0 < x < 1$
 (B) $2 < x < 3$
 (C) $-2 < x < -1$
 (D) $4 < x < 5$

45. Let $r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = 2\}$ be a circle with center at z_0 and radius 2 which is described in counter clock wise direction. Let f be a complex function which is analytic within and on the circle r . If $|f(z)| \leq 6$ for all z on r . Then :

- (A) $|f^{(2)}(z_0)| \leq 3$
 (B) $|f^{(2)}(z_0)| = 5$
 (C) $5 \leq |f^{(2)}(z_0)| \leq 8$
 (D) $6 \leq |f^{(2)}(z_0)| \leq 10$

Where $f^{(2)}(z_0)$ denotes the second derivative of f at $z = z_0$ and \mathbb{C} denotes the set of all complex numbers.

45. मान लीजिये कि $r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = 2\}$ z_0 केन्द्र एवं 2 त्रिज्या वाला एक वृत्त है जिसे घड़ी की विपरीत दिशा में वर्णित किया गया है। मान लीजिये कि f एक सम्मिश्र फलन है जो कि r के भीतर एवं पर वैश्लेषिक है। यदि r पर प्रत्येक z के लिये $|f(z)| \leq 6$ है। तो :

- (A) $|f^{(2)}(z_0)| \leq 3$
 (B) $|f^{(2)}(z_0)| = 5$
 (C) $5 \leq |f^{(2)}(z_0)| \leq 8$
 (D) $6 \leq |f^{(2)}(z_0)| \leq 10$

जहाँ $f^{(2)}(z_0)$, $z = z_0$ पर f के द्वितीय अवकलज को दर्शाता है एवं \mathbb{C} सभी सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय को दर्शाता है।

46. Let \mathcal{C} is the set of all complex numbers. Define a function $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ by $f(z) = \operatorname{Re}(z) \forall z \in \mathcal{C}$. Now, consider the integral $I = \int_r f(z) dz = \int_r \operatorname{Re}(z) dz$, where r is a curve as shown in the figure-1 given below –

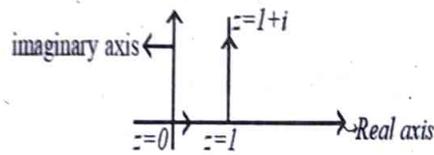


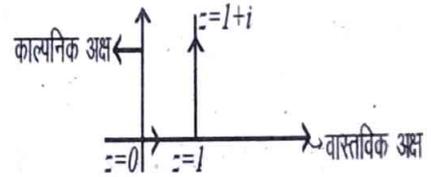
Figure-1.

Then the value of $4|I|^2$ is :

- (A) 4
- (B) 3
- (C) 5
- (D) $\frac{5}{2}$

Here $\operatorname{Re}(z)$ denotes the real part of the complex number z and $|I|$ denotes the modulus of I .

46. मान लीजिये कि \mathcal{C} सभी सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है। फलन $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ को $f(z) = \operatorname{Re}(z) \forall z \in \mathcal{C}$ से परिभाषित करें। अब, समाकल $I = \int_r f(z) dz = \int_r \operatorname{Re}(z) dz$ पर विचार कीजिये, जहाँ r एक वक्र है जैसा कि नीचे दिये चित्र-1 में दर्शाया गया है –



चित्र-1

तो $4|I|^2$ का मान है :

- (A) 4
- (B) 3
- (C) 5
- (D) $\frac{5}{2}$

यहाँ $\operatorname{Re}(z)$ सम्मिश्र संख्या z के वास्तविक भाग को दर्शाता एवं $|I|, I$ के मापांक को दर्शाता है।

47. Consider the following statements

(i) The series

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n^4 + 1} - \sqrt{n^4 - 1}]$$

is convergent.

(ii) The series

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n^8 + 1} - \sqrt{n^8 - 1}]$$

is convergent.

Then :

- (A) Only (i) is true
 (B) Only (ii) is true
 (C) Both (i) and (ii) are true
 (D) Both (i) and (ii) are false

48. Let $r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ be a circle of radius 2 which is described in anti-clock wise direction. Then the value of integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{1}{(z-1)(z-20)^4} dz \text{ is :}$$

- (A) $\frac{1}{19}$
 (B) $\frac{1}{19^4}$
 (C) $\frac{1}{19^2}$
 (D) $\frac{1}{19^3}$

47. निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिये -

(i) श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n^4 + 1} - \sqrt{n^4 - 1}]$$

अभिसारी है।

(ii) श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n^8 + 1} - \sqrt{n^8 - 1}]$$

अभिसारी है।

तो :

- (A) केवल (i) सत्य है
 (B) केवल (ii) सत्य है
 (C) (i) एवं (ii) दोनों सत्य हैं
 (D) (i) एवं (ii) दोनों असत्य हैं

48. मान लीजिये कि $r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ त्रिज्या 2 का एक वृत्त है जो कि घड़ी की विपरीत दिशा में वर्णित है। तो समाकलन

$$\frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{1}{(z-1)(z-20)^4} dz \text{ का मान है :}$$

- (A) $\frac{1}{19}$
 (B) $\frac{1}{19^4}$
 (C) $\frac{1}{19^2}$
 (D) $\frac{1}{19^3}$

49. Consider the following statements

(i) Let \mathbb{C} be the set of all complex numbers. Define a function $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ by $f(z) = \bar{z} \forall z \in \mathbb{C}$. Then f is analytic at $z = 2$.

(ii) Let \mathbb{C} be the set of all complex numbers. Define a function $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ by $f(z) = z^4 \forall z \in \mathbb{C}$. Then f is analytic everywhere in \mathbb{C} .

Then :

- (A) Only (i) is true
- (B) Only (ii) is true
- (C) Both (i) and (ii) are true
- (D) Both (i) and (ii) are false

50. Let \mathbb{C} be the set of all complex numbers. Define a function $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ by $f(z) = z^4 \sin z \forall z \in \mathbb{C}$.

Then:

- (A) $z = 0$ is a zero of order four of f
- (B) $z = 0$ is a zero of order five of f
- (C) $z = 0$ is not a zero of f
- (D) $z = \frac{\pi}{2}$ is a zero of f

49. निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिये -

(i) मान लीजिये कि \mathbb{C} सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। फलन $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ को $f(z) = \bar{z} \forall z \in \mathbb{C}$ से परिभाषित करें। तो $f, z = 2$ पर वैश्लेषिक है।

(ii) मान लीजिये कि \mathbb{C} सभी सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है। फलन $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ को $f(z) = z^4 \forall z \in \mathbb{C}$ से परिभाषित करें। तो f, \mathbb{C} से सर्वत्र वैश्लेषिक है।

तो :

- (A) केवल (i) सत्य है
- (B) केवल (ii) सत्य है
- (C) (i) एवं (ii) दोनों सत्य हैं
- (D) (i) एवं (ii) दोनों असत्य हैं

50. मान लीजिये कि \mathbb{C} सभी सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है। फलन $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ को $f(z) = z^4 \sin z \forall z \in \mathbb{C}$ से परिभाषित करें। तो :

- (A) $z = 0$ फलन f का कोटि चार का शून्य है
- (B) $z = 0$ फलन f का कोटि पाँच का शून्य है
- (C) $z = 0$ फलन f का शून्य नहीं है
- (D) $z = \frac{\pi}{2}$ फलन f का एक शून्य है
